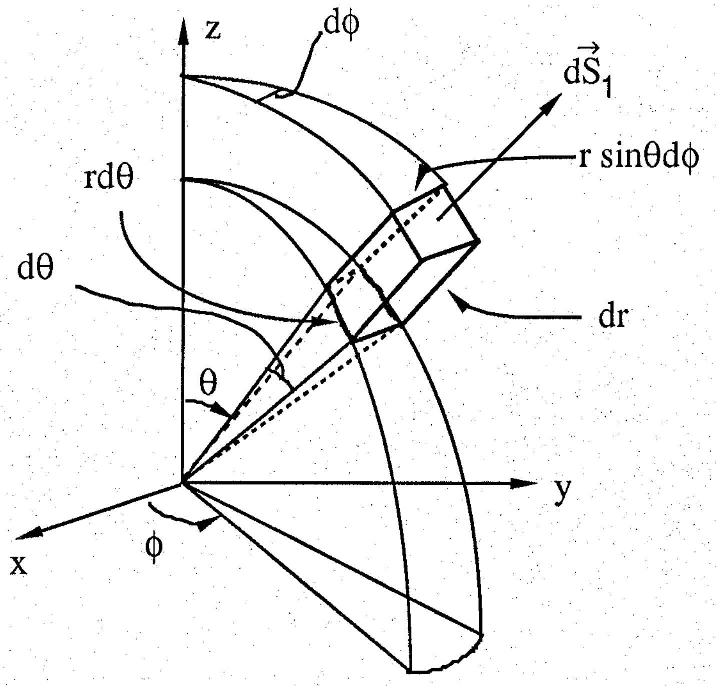
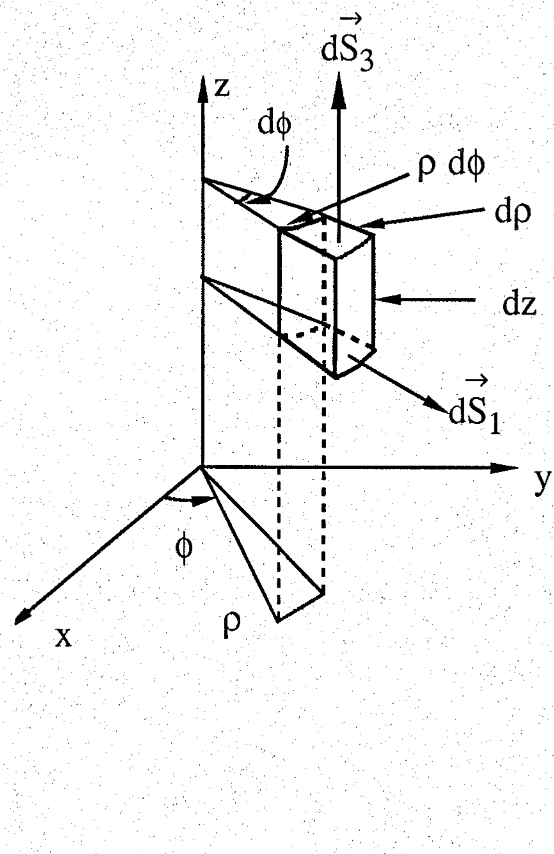


VEKTORANALYS

Staffan Linnæus
Rolf Paulsson
Staffan Yngve
Institutionen för teoretisk fysik
Uppsala
2003



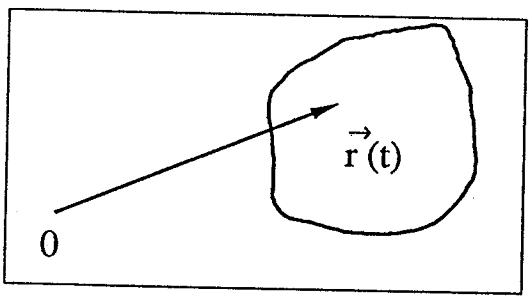
VEKTORANALYS

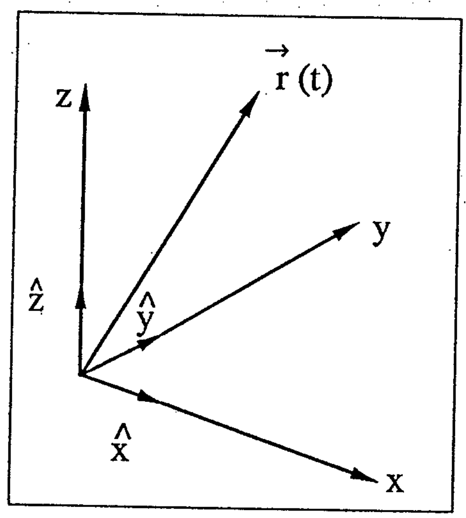
(1 uppl. 1990, 2 uppl. 1991, 3 uppl. 2003)

1. VEKTORER OCH FÄLT

1.1. Vektoralgebra

Då fysikaliska storheter beskrivs med hjälp av vektorer kan sambanden mellan dessa storheter formuleras oberoende av val av koordinatsystem. Sålunda anges t ex rörelsen av ett volymselement i en vätska med ortsvektorn (lägevektorn) $\vec{r}(t)$ för volymselementet. Beräkningen av fysikaliska storheter sker dock relativt något koordinatsystem, vilket väljs beroende på problemets natur.





I ett kartesiskt högersystem med basvektorerna $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ skrivs t ex ortsvektorn $\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y} + z(t)\,\hat{z}$.
Beteckningarna för basvektorer varierar. Exempel på beteckningar i fallet kartesiskt system:

$(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ $(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$

$(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ $(\hat{e}_i, \hat{e}_j, \hat{e}_k)$

$(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$

Med "tak" över en vektor avses alltid att vektorns längd är 1 .

Vi kommer i det följande att låta x_1 beteckna kartesiska x-komponenten av ortsvektorn $\vec{r}$. x_2 betecknar motsvarande y-komponent och x_3 motsvarande z-komponent. För en godtycklig vektor $\vec{A}$ betecknar vi x-komponenten A_1 , y-komponenten A_2 och z-komponenten A_3 .Vidare får $\hat{x}_1$ ange en enhetsvektor i x-axelns (x_1-axelns) riktning, $\hat{x}_2$ d:o i y-axelns (x_2-axelns) riktning och $\hat{x}_3$ en i zaxelns (x_3-axelns) riktning. Av tydlighetsskäl kommer vi ett par gånger att återgå till de mer traditionella beteckningarna A_x, A_y, A_z, $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$.

Införande av indices för att beteckna komponenter är ett led för att uppnå en mer överskådlig beskrivning, vilken även underlättar övergången till en fyrdimensionell (relativistisk) vektor- och tensoranalys. I denna kurs ska vi emellertid nöja oss med tre dimensioner. Det kan ta en stund att smälta "indexorgierna" på de följande sidorna, men i det långa loppet torde ett tillgodogörande av arbetssättet vara fruktbart, som de följande exemplen visar.

För att utrycka en vektor i sina komponenter skriver man i konventionella beteckningar

$$\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z} \; .$$

Med indexbeteckningar får vi istället den kompakta formeln

$$\vec{A} = \sum_i A_i \hat{x}_i \; .$$

Dylika summor över index förekommer så ymnigt att man har funnit det lämpligt att förkorta skrivsättet för dem. Vi inför **Einsteins summakonvention**, vilken utsäger att summation alltid underförstås över alla index som **upprepas i samma term.** T ex kan formeln ovan helt enkelt skrivas

$$\vec{A} = A_i \hat{x}_i \; .$$

Summationsindexet i är ett s k **stumt index**, d v s man kan byta namn på det utan att uttryckets värde ändras., t ex $a_i b_i = a_k b_k$. Index som inte upprepas inom samma term kallas **fasta index.** Man får inte använda Einsteins summakonvention i uttryck där samma index förekommer **fler än två gånger** i samma term, t ex $a_i\, b_i\, c_i$.

Skalärprodukten $\vec{A} \cdot \vec{B}$ av två vektorer $\vec{A}$ och $\vec{B}$ definieras i vektoralgebran som

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}| \cos\theta \, ,$$

där θ är vinkeln mellan vektorerna. (Lägg märke till att skalärprodukten alltså som namnet säger är en **skalär.**) För de tre basvektorerna ger denna definition följande multiplikationstabell:

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1$$

$$\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{x} \cdot \hat{z} = \hat{y} \cdot \hat{z} = 0 \, .$$

Kroneckerdeltat δ_{ik} definieras som

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{om} \quad i \neq k \\ 1 & \text{om} \quad i = k \end{cases}$$

Om vi nu använder indexbeteckningar kan skalärprodukten mellan basvektorerna skrivas på följande sätt:

$$\hat{x}_i \cdot \hat{x}_k = \delta_{ik} .$$

Skalärprodukten mellan två godtyckliga vektorer $\vec{A}$ och $\vec{B}$ kan nu enkelt uttryckas i vektorernas kartesiska komponenter genom att utnyttja den **distributiva lagen för skalärprodukten**:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C} .$$

Med indexbeteckningar och Einsteins summakonvention får vi

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_i \hat{x}_i) \cdot (B_j \hat{x}_j) = A_i B_j \hat{x}_i \cdot \hat{x}_j = A_i B_j \delta_{ij} = A_i B_i .$$

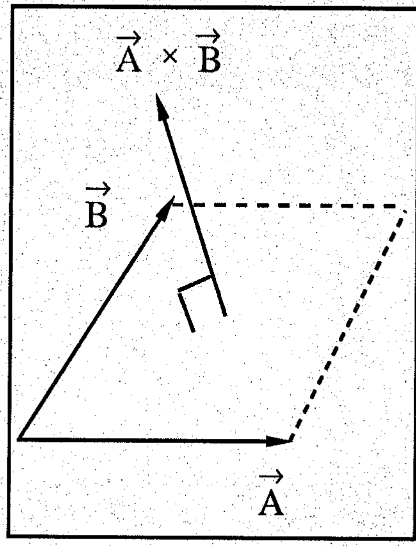
Några kommentarer: Detta var ett exempel på hur man kan arbeta med Einsteinssummor nästan utan att tänka på att det är fråga om summor.Man måste dock komma ihåg att införa ett nytt summationsindex för varje ny summa. Vi använde således "i" som index i utvecklingen av $\vec{A}$ men "j" i utvecklingen av $\vec{B}$. När vi multiplicerade ihop de två summorna $A_i \hat{x}_i$ och $B_j \hat{x}_j$ av vardera 3 termer fick vi som resultat dubbelsumman $A_i B_j \hat{x}_i \cdot \hat{x}_j$ med sammanlagt 9 termer. När Kroneckerdeltat uppträder i en Einsteinsumma kan man "stryka" ett summationsindex eftersom δ_{ij} är noll om $i \neq j$. I vårt exempel spelade det ingen roll om vi hade behållit "j" istället för "i" som summationsindex i sista ledet, men i allmänhet måste man se till att det index man "stryker" verkligen är stumt. Läsaren rekommenderas att noga gå igenom härledningen ovan och övertyga sig om att han/ hon förstår varje steg.

Vektorprodukten $\vec{A} \times \vec{B}$ av två vektorer $\vec{A}$ och $\vec{B}$ med inbördes vinkel θ definieras som en **vektor** med beloppet

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}|\,|\vec{B}| \sin\theta$$

och riktad vinkelrätt mot det plan som $\vec{A}$ och $\vec{B}$ spänner upp så att $\vec{A}$, $\vec{B}$ och $\vec{A} \times \vec{B}$ i nu nämnd ordning bildar en högertriplett. Man kan se

$\vec{A} \times \vec{B}$ som ytan av det parallellogram som spänns upp av $\vec{A}$ och $\vec{B}$ med riktning längs ytans normalvektor; se figur.



Vektorprodukten är **antikommutativ** , dvs

$$\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B} ,$$

och man måste därför vara noga med ordningen mellan vektorerna. Man inser också lätt att vektorprodukten mellan parallella eller antiparallella vektorer blir nollvektorn.

För basvektorerna i ett ortonormerat högersystem får man följande samband

$$\hat{x} \times \hat{y} = -\hat{y} \times \hat{x} = \hat{z}$$

$$\hat{y} \times \hat{z} = -\hat{z} \times \hat{y} = \hat{x}$$

$$\hat{z} \times \hat{x} = -\hat{x} \times \hat{z} = \hat{y}$$

$$\hat{x} \times \hat{x} = \hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} = \vec{0}$$

Dessa relationer kan skrivas på kompakt form med hjälp av **permutationssymbolen** eller **Levi-Civitásymbolen** ε_{ijk} , vilken defineras som följer:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 \text{ om } ijk \text{ är en } \textbf{jämn} \text{ permutation av } 1\ 2\ 3 \\ -1 \text{ om } ijk \text{ är en } \textbf{udda} \text{ permutation av } 1\ 2\ 3 \\ \ \ 0 \text{ för övrigt, dvs om två index är lika.} \end{cases}$$

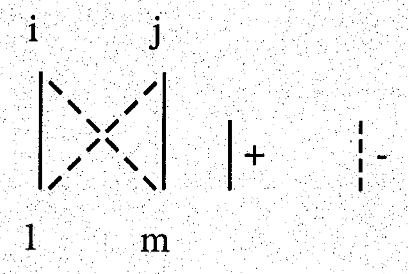
Man verifierar lätt att ε_{ijk} byter tecken om två index t ex i och j byter plats, är oförändrad om index permuteras cykliskt, samt uppfyller relationen

$$\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{klm} = \delta_{il}\, \delta_{jm} - \delta_{jl}\, \delta_{im}$$

eller med Einsteins summakonvention:

$$\varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{klm} = \delta_{il}\, \delta_{jm} - \delta_{jl}\, \delta_{im}\,.$$

Observera, att här skall vi endast summerar över k i vänstra ledet - det enda index som upprepas . Beviset av den sista relationen går väsentligen ut på att "traggla igenom" fall efter fall, vilket är föga inspirerande och överlämnas åt den ev intresserande läsaren.
Minnesregel:



Med lite eftertanke inser man att formlerna för vektorprodukterna av basvektorerna kan sammanfattas

$$\hat{x}_i \times \hat{x}_j = \varepsilon_{ijk}\, \hat{x}_k\,.$$

Här är högra ledet en summa över k , men högst en av de tre termerna kan vara skild från noll, nämligen den där k varken är lika med i eller j . (Om i = j blir förstås alla termerna noll).

Vektorprodukten är liksom skalärprodukten **distributiv** , dvs

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

och

$$(\vec{A} + \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{C} + \vec{B} \times \vec{C}$$

för alla vektorer $\vec{A}$, $\vec{B}$ och $\vec{C}$ (vilket vi dock inte bevisar) . Eftersom vi redan känner vektorprodukterna mellan basvektorerna kan vi därför uttrycka vektorprodukten mellan två godtyckliga vektorer i deras komponenter. Resultatet blir, skrivet på tre olika sätt,

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\,\hat{x} + (A_zB_x - A_xB_z)\,\hat{y} + (A_xB_y - A_yB_x)\,\hat{z}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= \varepsilon_{ijk}\,\hat{x}_i A_j B_k$$

Den sista likheten uttrycks ofta som en formel för en godtycklig komponent av $(\vec{A} \times \vec{B})$:

$$(\vec{A} \times \vec{B})_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k$$

där summan i högra ledet nu bara ska tas över j och k, medan i är ett fast index.

Vi skall nu som exempel på permutationssymbolens användbarhet visa identiteterna

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\,\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\,\vec{C}$$

och

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})\,.$$

Bevis av den första identiteten:

$$[\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})]_i = \varepsilon_{ijk}\, A_j\, (\vec{B} \times \vec{C})_k \quad \text{(summation över } j \text{ och } k\text{)},$$

där

$$(\vec{B} \times \vec{C})_k = \varepsilon_{klm}\, B_l\, C_m \quad \text{enl def, d v s}$$

$$[\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})]_i = (\varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{klm})\, A_j\, B_l\, C_m = (\delta_{il}\, \delta_{jm} - \delta_{jl}\, \delta_{im})\, A_j\, B_l\, C_m =$$

$$= B_i\, A_j\, C_j - C_i\, A_j\, B_j = [(\vec{A} \cdot \vec{C})\,\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\,\vec{C}\,]_i\,.$$